学力検査問題　［数学］（その１）

（2022 一般ＩＡ）

解答はすべて解答用紙に記入せよ。

1　次の文の $\boxed{}$ の中に入れるべき適当な数または式を解答欄に記入せよ。

(1)　k を正の定数とするとき，座標平面上に，放物線 $y=x^2+4kx+3k^2+3$ …… ① がある。放物線 ① の頂点の座標は k を用いて（$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$）と表される。いま，放物線 ① は x 軸と異なる２点 A$(a,\ 0)$，B$(b,\ 0)$（ただし，a，b は $a<b$ を満たす定数）で交わるものとする。このとき，k のとりうる値の範囲は $k>\boxed{\text{ウ}}$ であり，b は k を用いて $b=\boxed{\text{エ}}$ と表される。さらに，放物線 ① を x 軸方向と y 軸方向にいずれも 1 だけ平行移動した放物線を ② とするとき，放物線 ② が点 B において x 軸と接するならば，k の値は $k=\boxed{\text{オ}}$ であり，a，b の値はそれぞれ $a=\boxed{\text{カ}}$，$b=\boxed{\text{キ}}$ である。

(2)　1個のサイコロを繰り返し投げて出た目の数を全て加えていくとき，その合計（ただし，1回投げただけの場合は，1回目に出た目）が 4 以上になったところで，サイコロを投げることを終了する。このとき，終了するまでの目の出方について，サイコロを1回投げただけで終了する目の出方は $\boxed{\text{ク}}$ 通りである。1の目が出たところで終了する目の出方は $\boxed{\text{ケ}}$ 通りである。同様に，2の目，3の目が出たところで終了する目の出方は それぞれ $\boxed{\text{コ}}$ 通り，$\boxed{\text{サ}}$ 通りである。また，終了するまでにサイコロを投げる回数が最も多くなるのは，$\boxed{\text{シ}}$ 回投げたときであり，そのときの目の出方は $\boxed{\text{ス}}$ 通りである。

(3)　3次方程式 $x^3-1=0$ の解のうち虚数であるものの1つを ω とする。このとき，ω^3，$\omega^2+\omega+1$ の値は それぞれ $\omega^3=\boxed{\text{セ}}$，$\omega^2+\omega+1=\boxed{\text{ソ}}$ と求まる。また，$(1+\omega-\omega^2)(1-\omega+\omega^2)$，$\omega^2+\omega^4+\omega^6$，$(1+\omega^2)^3$，$10+\omega^{100}+\omega^{200}$ の値を求めると，それぞれ $(1+\omega-\omega^2)(1-\omega+\omega^2)=\boxed{\text{タ}}$，$\omega^2+\omega^4+\omega^6=\boxed{\text{チ}}$，$(1+\omega^2)^3=\boxed{\text{ツ}}$，$10+\omega^{100}+\omega^{200}=\boxed{\text{テ}}$ である。

(4)　数列 3，6，12，24，…… を $\{a_n\}$ とする。$\{a_n\}$ は等比数列であり，その初項 a_1 と公比 r の値は $a_1=\boxed{\text{ト}}$，$r=\boxed{\text{ナ}}$ である。また，数列 $\{b_n\}$ を $b_n=\log_{10}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定めると，その初項 b_1 の値は $b_1=\boxed{\text{ニ}}$ であり，第2項 b_2，第3項 b_3 の値は $b_2=\boxed{\text{ニ}}+\boxed{\text{ヌ}}$，$b_3=\boxed{\text{ニ}}+\boxed{\text{ネ}}\cdot\boxed{\text{ヌ}}$ と表される。したがって，$\{b_n\}$ は等差数列であり，その公差 d の値は $d=\boxed{\text{ノ}}$ である。このとき，$\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$S_n=\log_{10}\left(3^{\boxed{\text{ハ}}}\cdot 2^{\boxed{\text{ヒ}}}\right)$（ただし，$\boxed{\text{ハ}}$，$\boxed{\text{ヒ}}$ は n を用いた式）と表すことができる。

学力検査問題　［数学］（その２）

解答はすべて解答用紙に記入せよ。

2　O を原点とする座標空間内に，3点 A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 2)$（ただし，a，b は $a > b > 0$ を満たす定数）がある。また，直線 AB 上の点 P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数の定数 t をとる。このとき，次の (1)，(2) について，(1) は文中の $\boxed{}$ の中に入れるべき適当な数または式を，(2) は解答の過程と答えを，それぞれ解答欄に記入せよ。

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|$ はそれぞれ a，b を用いて $|\overrightarrow{\mathrm{CA}}| = \boxed{\text{ア}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{CB}}| = \boxed{\text{イ}}$ と表され，内積 $\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ の値は $\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \boxed{\text{ウ}}$ と求まる。また，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ の成分表示は $\overrightarrow{\mathrm{CP}} = (\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}})$ である。いま，$\cos\angle\mathrm{ACB}$ の値が $\cos\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ であり，かつ四面体 OABC の体積の値が $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ であったとする。このとき，定数 a，b の値を求めると $a = \boxed{\text{キ}}$，$b = \boxed{\text{ク}}$ である。

(2)　(1) で求めた a，b の値に対して，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|$ が最小になるときの t の値と $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|$ の最小値 m の値を求めよ。ただし，解答の過程に関して，(1) で求めた結果は そのまま用いてよい。

（ 以下の余白は計算用に使ってよい。）

解答用紙　［数学］

2022
般ＩＡ

受験番号	

解 答 例

1

(1)	ア	$-2k$	イ	$-k^2+3$	ウ	$\sqrt{3}$	エ	$-2k+\sqrt{k^2-3}$	オ	2
	カ	-5	キ	-3						

(2)	ク	3	ケ	4	コ	6	サ	7	シ	4	ス	6

(3)	セ	1	ソ	0	タ	4	チ	0	ツ	-1	テ	9

(4)	ト	3	ナ	2	ニ	$\log_{10}3$	ヌ	$\log_{10}2$	ネ	2	ノ	$\log_{10}2$
	ハ	n	ヒ	$\dfrac{n(n-1)}{2}$								

2

(1)	ア	$\sqrt{a^2+4}$	イ	$\sqrt{b^2+4}$	ウ	4	エ	$a-at$	オ	bt	カ	-2
	キ	2	ク	$\sqrt{2}$								

(2) 解答の過程

(1) で求めた結果から，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(a-at,\ bt,\ -2)$ であり，$a=2$，$b=\sqrt{2}$ である。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(2-2t,\ \sqrt{2}\,t,\ -2)$ である。このとき，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\sqrt{(2-2t)^2+2t^2+4}=\sqrt{6t^2-8t+8}=\sqrt{6\left(t-\frac{4}{6}\right)^2-\frac{16}{6}+\frac{48}{6}}=\sqrt{6\left(t-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{32}{6}}$$

$$=\sqrt{6\left(t-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{16}{3}}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|$ は $t=\dfrac{2}{3}$ のとき最小値 $m=\sqrt{\dfrac{16}{3}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ をとる。　■

［別解］

(1) で求めた結果から，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ \sqrt{2},\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(2-2t,\ \sqrt{2}\,t,\ -2)$ である。

$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|$ が最小になるのは，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のときなので，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0 \Leftrightarrow -4+4t+2t=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{2}{3}$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3},\ -2\right)$ となるので，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|$ の最小値 m は $m=\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2+(-2)^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

答	$t=\dfrac{2}{3}$	$m=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$