

解答はすべて解答用紙に記入せよ。

1 次の文の  の中に入れるべき適当な数または式を解答欄に記入せよ。

(1)  $x, y$  についての整式  $A = 2x^2 - y^2 + xy - 5x + 4y - 3$  がある。整式  $A$  を  $x$  について降べきの順に整理すると、 $A = 2x^2 + (\text{ア})x + (\text{イ})$  となる。ここで、 $\text{イ} = -(y-a)(y-b)$  (ただし、 $a, b$  は  $a < b$  を満たす定数) と因数分解したときの  $a, b$  の値を求めると  $a = \text{ウ}$ ,  $b = \text{エ}$  である。したがって、整式  $A$  は  $A = (\text{オ})(\text{カ})$  (ただし、 $x$  と  $y$  に着目したときの  $\text{オ}$  の定数項は 1) と因数分解できる。

(2) 10 以下の素数は , , ,  (ただし、 <  <  < ) である。いま、 $10!$  を素因数分解して  $10! = \text{キ}^a \cdot \text{ク}^b \cdot \text{ケ}^c \cdot \text{コ}^d$  と表すとき、自然数  $a, b, c, d$  の値を求めると、 $a = \text{サ}$ ,  $b = \text{シ}$ ,  $c = \text{ス}$ ,  $d = \text{セ}$  である。したがって、 $10!$  の正の約数の個数は全部で  個である。

(3) 3次関数  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  (ただし、 $a, b, c, d$  は定数で  $a \neq 0$ ) は  $x = -1$  と  $x = 5$  で極値をとるものとする。いま、 $f(x)$  が  $f(0) = \frac{1}{3}$  を満たすとき、 $d$  の値は  $d = \text{タ}$  である。さらに、 $f(x)$  の  $x = 0$  における微分係数  $f'(0)$  の値が  $f'(0) = -5$  であるとき、 $c$  の値が  $c = \text{チ}$  と求まることから  $a, b$  の値も求まり、 $a = \text{ツ}$ ,  $b = \text{テ}$  である。したがって、このとき  $f(x)$  の極大値を  $M$ , 極小値を  $m$  とすると、 $M, m$  の値は  $M = \text{ト}$ ,  $m = \text{ナ}$  と求まる。

(4) 初項が 4 の数列  $\{a_n\}$  の階差数列  $\{b_n\}$  は、初項が 10, 公差が 12 の等差数列であるとする。このとき、 $a_2, a_3$  の値は  $a_2 = \text{ニ}$ ,  $a_3 = \text{ヌ}$  である。数列  $\{b_n\}$  の一般項  $b_n$  が  $n$  を用いて  $b_n = \text{ネ}$  と表されることから、数列  $\{a_n\}$  の一般項  $a_n$  は  $n$  を用いて  $a_n = \text{ノ}$  と表すことができる。ゆえに、 $\sum_{k=1}^n a_k$  は  $n$  を用いて  $\sum_{k=1}^n a_k = \text{ハ}$  と表される。

解答はすべて解答用紙に記入せよ。

2 長方形 OABC は2辺 OA, OC の長さが  $OA = 6$ ,  $OC = 3$  であるものとする。いま, 辺 OA を  $p : (1 - p)$  (ただし,  $0 < p < 1$ ) に内分する点を P とし, 辺 OC を  $q : (1 - q)$  (ただし,  $0 < q < 1$ ) に内分する点を Q とする。このとき, 次の (1), (2) について, (1) は文中の  の中に入れるべき適当な数または式を, (2) は解答の過程と答えを, それぞれ解答欄に記入せよ。

(1)  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$  とする。このとき,  $|\vec{a}|$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{c}$  の値を求めると,  $|\vec{a}| = \text{ア}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{c} = \text{イ}$  であり,  $\vec{OB}$  は  $\vec{a}$ ,  $\vec{c}$  を用いて  $\vec{OB} = \text{ウ}$  と表される。また,  $\vec{BP} = (\text{エ})\vec{BO} + (\text{オ})\vec{BA}$  (ただし,  $\text{エ}$ ,  $\text{オ}$  は  $p$  を用いた式) であることから,  $\vec{BP}$  は  $p$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{c}$  を用いて  $\vec{BP} = \text{カ}$  と表される。一方,  $\vec{AQ}$  は  $q$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{c}$  を用いて  $\vec{AQ} = \text{キ}$  と表される。ここで,  $\vec{BP}$  と  $\vec{AQ}$  が垂直であるとき,  $p$  は  $q$  を用いて  $p = \text{ク}$  と表すことができる。

(2)  $\vec{BP}$  と  $\vec{AQ}$  が垂直であるとき,  $p$ ,  $q$  それぞれのとりうる値の範囲を求めよ。ただし, 解答の過程に関して(1)で求めた結果はそのまま用いてよい。

-----  
(以下の余白は計算用に使ってよい。)

# 解答用紙 [数学 I・II・A・B]

2023  
般 II

受験番号	
------	--

1

(1)	ア		イ		ウ		エ	
	オ		カ					

(2)	キ		ク		ケ		コ	
	サ		シ		ス		セ	

(3)	タ		チ		ツ		テ		ト		ナ	
-----	---	--	---	--	---	--	---	--	---	--	---	--

(4)	ニ		ヌ		ネ		ノ		ハ	
-----	---	--	---	--	---	--	---	--	---	--

2

(1)	ア		イ		ウ		エ		オ	
	カ		キ		ク					

(2)	解答の過程									
		答	$p$ の値の範囲は	$q$ の値の範囲は						

解答例

1

(1)	ア	$y-5$	イ	$-y^2+4y-3$	ウ	1	エ	3
	オ	$2x-y+1$		カ	$x+y-3$			

(2)	キ	2	ク	3	ケ	5	コ	7		
	サ	8	シ	4	ス	2	セ	1	ソ	270

(3)	タ	$\frac{1}{3}$	チ	-5	ツ	$\frac{1}{3}$	テ	-2	ト	3	ナ	-33
-----	---	---------------	---	----	---	---------------	---	----	---	---	---	-----

(4)	ニ	14	ヌ	36	ネ	$12n-2$	ノ	$6n^2-8n+6$	ハ	$2n^3-n^2+3n$
-----	---	----	---	----	---	---------	---	-------------	---	---------------

2

(1)	ア	6	イ	0	ウ	$\vec{a}+\vec{c}$	エ	$1-p$	オ	$p$
	カ	$(p-1)\vec{a}-\vec{c}$		キ	$-\vec{a}+q\vec{c}$		ク	$-\frac{1}{4}q+1$		

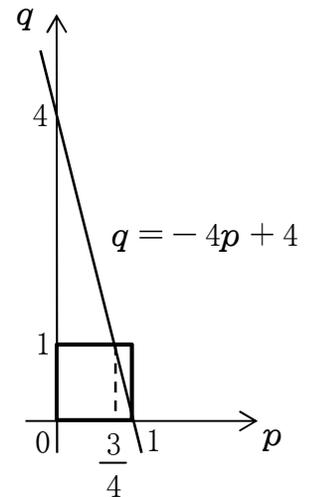
解答過程

$\vec{BP}$  と  $\vec{AQ}$  が垂直となるので、(1) から、 $p = -\frac{1}{4}q + 1$  が成り立つ。この条件において、点Qが  $0 < q < 1$  ……①の範囲を動くとする、 $-\frac{1}{4} < -\frac{1}{4}q < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{4} < -\frac{1}{4}q + 1 < 1$  であり、 $p$  の値の範囲は  $\frac{3}{4} < p < 1$  ……②となる。

一方で、点Pが  $0 < p < 1$  ……③の範囲を動いたとき、 $p = -\frac{1}{4}q + 1$  が成り立つ  $q$  の値の範囲は  $q = -4p + 4$  より、 $-4 < -4p < 0$  なので、 $-4 + 4 < -4p + 4 < 4$  であり、 $0 < q < 4$  ……④となる。

(2) の ②, ③ の共通範囲より、求める  $p$  の値の範囲は  $\frac{3}{4} < p < 1$  となり、

①, ④の共通範囲より、求める  $q$  の値の範囲は  $0 < q < 1$  となる。



答	$p$ の値の範囲は $\frac{3}{4} < p < 1$	$q$ の値の範囲は $0 < q < 1$
---	----------------------------------	------------------------