

学力検査問題 [数学Ⅰ・Ⅱ・A・B] (その1) (2023一般ⅠA)

解答はすべて解答用紙に記入せよ。

1 次の文の の中に入れるべき適当な数または式を解答欄に記入せよ。

- (1) 右の表のような対応する2つの変数 x, y の値からなる5組のデータがある。 x, y のデータの平均値をそれぞれ $\bar{x}, \bar{y}$ とすると、その値は $\bar{x} = \text{ア}$, $\bar{y} = \text{イ}$ である。また、 x のデータの分散の値は ウ であり、 y のデータの分散の値は エ である。さらに、 x と y の相関係数を r とするとき、 r の値は $r = \text{オ}$ (ただし、 オ は小数第1位まで求めた値) である。
- | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|
| x | 5 | 7 | 3 | 6 | 4 |
| y | 2 | 4 | 1 | 5 | 3 |

- (2) 9枚のカードには、9文字のアルファベット A, B, C, D, E, f, g, h, i の異なる文字が1枚のカードにつき1文字ずつ書かれている。この9枚のカードの中から同時に3枚のカードを引くとき、カードの引き方は全部で カ 通りである。また、同時に引いた3枚のカードのうち、大文字の書かれたカードは1枚につき点数を1.5点とし、小文字の書かれたカードは1枚につき点数を1点として、3枚のカードの点数を合計したものを合計点という。このとき、 カ 通りのうちの次の(i)～(iv)の場合の数が求まる。

- (i) 合計点が3点となるカードの引き方は キ 通りある。
 (ii) 合計点が整数となるカードの引き方は ク 通りある。
 (iii) 合計点が4点よりも大きくなならないカードの引き方は ケ 通りある。
 (iv) 合計点が4点未満となるカードの引き方は コ 通りある。

- (3) $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。2倍角の公式 $\cos 2\theta = \text{サ} \cos^2 \theta - 1$ を用いて、方程式 $\cos 2\theta - \cos \theta = 0$ の解 θ を求めると、 $\theta = \text{シ}$, ス , セ (ただし、 シ < ス < セ) である。また、同様に2倍角の公式を用いて、不等式 $\cos 2\theta + \cos \theta < 0$ の解を求めると、 ソ < θ < タ , チ < θ < ツ (ただし、 ソ < チ) である。

- (4) 座標空間内に、3点 $A(1, -1, -3)$, $B(-3, 1, -1)$, $C(-1, k, -1)$ (ただし、 k は定数) があり、線分 AB の中点を M とする。このとき、点 M の座標を求めると $M(\text{テ}, \text{ト}, \text{ナ})$ であるから、 $\overrightarrow{MC}$ の成分表示は $\overrightarrow{MC} = (\text{ニ}, \text{ヌ}, \text{ネ})$ と求まる。ここで、 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ が成り立つとき、 k の値が $k = \text{ノ}$ となることから、 $\angle CAB$ の大きさを求めると $\angle CAB = \text{ハ}^\circ$ である。

解答はすべて解答用紙に記入せよ。

2 O を原点とする座標平面上に、2つの曲線 $y = 2x^2$ …… ①, $y = x^2 + 2x + 1$ …… ② と直線 $l: y = px + q$ (ただし、 p, q は $p \neq 0$ を満たす定数) がある。いま、曲線 ① と直線 l が異なる2個の共有点を持ち、その共有点の x 座標を $x = \alpha, \beta$ (ただし、 α, β は $\alpha \neq \beta$ を満たす定数) とする。また、曲線 $y = x^3$ 上の2点 (α, α^3) , (β, β^3) の中点を M とし、直線 OM の傾きを m とする。このとき、次の (1), (2) について、(1) は文中の の中に入れるべき適当な数または式を、(2) は解答の過程と答えを、それぞれ解答欄に記入せよ。

(1) まず、曲線 ① と直線 l は異なる2個の共有点をもつので、 p と q の間には不等式 $q > \text{ア}$ …… ③ (ただし、 ア は p の2次式) が成り立つ。さらに、曲線 ② と直線 l の共有点がただ1つであるものとする。このとき、 $q = \text{イ}$ …… ④ (ただし、 イ は p の2次式) と表されるので、④ を ③ に代入することにより、 p のとりうる値の範囲は $\text{ウ} < p < \text{エ}$ である。また、 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ は p を用いた式で $\alpha + \beta = \text{オ}$, $\alpha\beta = \text{カ}$ と表されるので、直線 OM の傾き m は p を用いた式で $m = \frac{1}{8}(\text{キ})$ と表すことができる。

(2) 曲線 ② と直線 l の共有点がただ1つであるとする。直線 OM の傾き m が最大値をとるときの p, q の値と m の最大値を求めよ。ただし、解答の過程に関して、(1) で求めた結果はそのまま用いてよい。

(以下の余白は計算用に使ってよい。)

受 番	験 号	
--------	--------	--

1

(1)	ア		イ		ウ		エ		オ	
-----	---	--	---	--	---	--	---	--	---	--

(2)	カ		キ		ク		ケ		コ	
-----	---	--	---	--	---	--	---	--	---	--

(3)	サ		シ		ス		セ		ソ		タ	
	チ		ツ									

(4)	テ		ト		ナ		ニ		ヌ		ネ	
	ノ		ハ									

2

(1)	ア		イ		ウ		エ		オ	
	カ		キ							

(2)	解 答 の 過 程										
		答	$p =$	$q =$	m の最大値は						

解 答 例

1

(1)	ア	5	イ	3	ウ	2	エ	2	オ	0.8		
(2)	カ	84	キ	4	ク	44	ケ	74	コ	34		
(3)	サ	2	シ	0	ス	$\frac{2}{3}\pi$	セ	$\frac{4}{3}\pi$	ソ	$\frac{1}{3}\pi$	タ	π
	チ	π	ツ	$\frac{5}{3}\pi$								
(4)	テ	-1	ト	0	ナ	-2	ニ	0	ヌ	k	ネ	1
	ノ	-1	ハ	30								

2

(1)	ア	$-\frac{p^2}{8}$	イ	$-\frac{p^2}{4} + p$	ウ	0	エ	8	オ	$\frac{p}{2}$
	カ	$\frac{p^2}{8} - \frac{p}{2}$	キ	$-p^2 + 12p$						

(2)	解答の過程	(1) で求めた結果から, $q = -\frac{p^2}{4} + p \cdots \cdots \textcircled{4}$, $0 < p < 8 \cdots \cdots \textcircled{5}$, $m = \frac{1}{8}(-p^2 + 12p)$ である。 よって, $m = \frac{1}{8}\{-(p-6)^2 + 36\} = -\frac{1}{8}(p-6)^2 + \frac{36}{8} = -\frac{1}{8}(p-6)^2 + \frac{9}{2}$ である。 すなわち, $\textcircled{5}$ の範囲内で m は $p = 6$ のときに最大値 $\frac{9}{2}$ をとる。また, $p = 6$ のときの q の値は $\textcircled{4}$ から $q = -\frac{6^2}{4} + 6 = -\frac{36}{4} + 6 = -9 + 6 = -3 \quad \blacksquare$			
		答	$p = 6$	$q = -3$	m の最大値は $\frac{9}{2}$