数　学［問題その１］

解答はすべて解答用紙に記入せよ。

$\boxed{1}$ 次の文の $\boxed{}$ の中に入れるべき適当な数または式を解答欄に記入せよ。

(1) 四角形 ABCD において, 3 辺 AB, BC, CD の長さが AB ＝ 3, BC ＝ 8, CD ＝ 5 であり, ∠ABC, ∠CDA の大きさが ∠ABC ＝ 60°, ∠CDA ＝ 120° であるとする。 いま, △ABC に余弦定理を用いると, 辺 AC の長さは AC ＝ $\boxed{\text{ア}}$ であり, △CDA に余弦定理を用いると, 辺 DA の長さは DA ＝ $\boxed{\text{イ}}$ である。このとき, △ABC の外接円の半径を R とすると, R の値は $R = \boxed{\text{ウ}}$ である。また, △ABC の面積 S_1 の値は $S_1 = \boxed{\text{エ}}$ であり, 四角形 ABCD の面積 S_2 の値は $S_2 = \boxed{\text{オ}}$ である。

(2) 右の図のような 5 個のマスのそれぞれの中に, 1 または 2 のいずれか 1 つの数字を書き入れて全てのマスをうめる。

（ｉ） マスのうめ方は全部で $\boxed{\text{カ}}$ 通りある。

（ⅱ） 1 を 4 回だけ書き入れるときのマスのうめ方は $\boxed{\text{キ}}$ 通りある。

（ⅲ） 1 を 3 回までしか書き入れないときのマスのうめ方は $\boxed{\text{ク}}$ 通りある。

（ⅳ） もっとも左側のマスに 1 を書き入れるときのマスのうめ方は $\boxed{\text{ケ}}$ 通りある。

（ｖ） 1 を 2 回以上書き入れるマスのうめ方の中で, 1 を書き入れたマスどうしが隣り合わないときのマスのうめ方は $\boxed{\text{コ}}$ 通りある。

(3) 2 つの関数 $y = \sin x$ …… ①, $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ …… ② がある。このとき, 関数 ② のグラフは関数 ① のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{サ}}$ （ただし, $-\pi < \boxed{\text{サ}} < \pi$）だけ平行移動したものであり, 関数 ② の周期の値は $\boxed{\text{シ}}$ である。次に, 関数 $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ （$0 \leqq x \leqq \pi$）について, y がとりうる値の範囲は $\boxed{\text{ス}} \leqq y \leqq \boxed{\text{セ}}$ であり, 直線 $y = \dfrac{1}{3}$ とこの関数のグラフの交点の個数は $\boxed{\text{ソ}}$ 個である。

(4) $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ とするとき, a, b を用いた式で $\log_{10} 6$, $\log_{10} \dfrac{20}{3}$, $\log_{10} 15$, $\log_{10} 75$ を表すと, それぞれ $\log_{10} 6 = \boxed{\text{タ}}$, $\log_{10} \dfrac{20}{3} = \boxed{\text{チ}}$, $\log_{10} 15 = \boxed{\text{ツ}}$, $\log_{10} 75 = \boxed{\text{テ}}$ となる。ここで, $a = 0.3010$, $b = 0.4771$ とするとき, 自然数 75^{50} の桁(けた)数を求めると, 75^{50} は $\boxed{\text{ト}}$ 桁の数である。

(5) 数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 2$, 公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列とし, その初項から第 n 項までの和を S_n とする。また, 数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = 4$, 公差 $\dfrac{1}{4}$ の等差数列とし, その初項から第 n 項までの和を T_n とする。このとき, 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n と $\dfrac{S_n}{n}$ は n を用いた式で, それぞれ $a_n = \boxed{\text{ナ}}$, $\dfrac{S_n}{n} = \boxed{\text{ニ}}$ と表され, 数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n と $\dfrac{T_n}{n}$ は n を用いた式で, それぞれ $b_n = \boxed{\text{ヌ}}$, $\dfrac{T_n}{n} = \boxed{\text{ネ}}$ と表される。したがって, $a_n = b_n$ を満たす n の値は $n = \boxed{\text{ノ}}$ であり, $S_n = T_n$ を満たす n の値は $n = \boxed{\text{ハ}}$ である。

数　学　［問題その２］

解答はすべて解答用紙に記入せよ。

$\boxed{2}$ △OAB の2辺 OA，OB の長さを OA＝2，OB＝3 とし，直線 AB 上に点 C をとる。いま，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とし，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を $\vec{a}\cdot\vec{b}=p$ とする。さらに，$\overrightarrow{AC}=t\,\overrightarrow{AB}$ を満たす実数 t をとる。このとき，次の (1), (2) について，(1) は文中の $\boxed{}$ の中に入れるべき適当な数または式を，(2) は解答の過程と答えを，それぞれ解答欄に記入せよ。

(1) $|\vec{a}|^2$, $|\vec{b}|^2$ の値は $|\vec{a}|^2=\boxed{\text{ア}}$，$|\vec{b}|^2=\boxed{\text{イ}}$ である。また，cos∠AOB および $|\overrightarrow{AB}|^2$ は p を用いて cos∠AOB＝$\boxed{\text{ウ}}$，$|\overrightarrow{AB}|^2=\boxed{\text{エ}}$ と表される。さらに，$\overrightarrow{OC}$ が t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて $\overrightarrow{OC}=\boxed{\text{オ}}$ と表されることから，$|\overrightarrow{OC}|^2=(\boxed{\text{カ}})\,t^2+(\boxed{\text{キ}})\,t+4$（ただし，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ は p を用いた式）と表すことができる。ここで，$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$ が成り立つとき，t は p を用いて $t=\boxed{\text{ク}}$ と表される。

(2) $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$ が成り立つとき，$|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{AB}|$ を p を用いて表せ。ただし，解答の過程に関して，(1)で求めた結果はそのまま用いてよい。

（ 以下の余白は計算用に使ってよい。）

’19 I

受験番号	

数　学［解答用紙］

解答例

1

(1)	ア	7	イ	3	ウ	$\frac{7\sqrt{3}}{3}$	エ	$6\sqrt{3}$	オ	$\frac{39\sqrt{3}}{4}$
(2)	カ	32	キ	5	ク	26	ケ	16	コ	7
(3)	サ	$\frac{\pi}{4}$	シ	2π	ス	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	セ	1	ソ	1
(4)	タ	$a+b$	チ	$1+a-b$	ツ	$1-a+b$	テ	$2-2a+b$	ト	94

(5)	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ
	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n+7}{4}$	$\frac{n+15}{4}$	$\frac{n+31}{8}$	9	17

2

(1)	ア	4	イ	9	ウ	$\frac{p}{6}$	エ	$13-2p$	オ	$\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})$
	カ	$13-2p$	キ	$2p-8$	ク	$\frac{4-p}{13-2p}$				

(2) 解答の過程

$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$ のとき，(1)で求めた結果から，$t=\frac{4-p}{13-2p}$ であり，また，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{13-2p}$ である。さらに，

$$|\overrightarrow{OC}|^2=(13-2p)t^2+(2p-8)t+4=(13-2p)\cdot\frac{(4-p)^2}{(13-2p)^2}+(2p-8)\cdot\frac{4-p}{13-2p}+4$$

$$=\frac{16-8p+p^2}{13-2p}+\frac{-2p^2+16p-32}{13-2p}+\frac{52-8p}{13-2p}=\frac{-p^2+36}{13-2p}$$

よって，$|\overrightarrow{OC}|=\frac{\sqrt{36-p^2}}{\sqrt{13-2p}}$ なので，$|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{AB}|=\frac{\sqrt{36-p^2}}{\sqrt{13-2p}}\cdot\sqrt{13-2p}=\sqrt{36-p^2}$ である。

［別解］

(1)で求めた結果から，$\cos\angle AOB=\frac{p}{6}$ なので，$\sin\angle AOB=\sqrt{1-\frac{p^2}{36}}=\frac{\sqrt{36-p^2}}{6}$ となることから，

△OAB の面積を S とすると，$S=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{36-p^2}}{6}=\frac{\sqrt{36-p^2}}{2}$ である。

一方，$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$ のとき，$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{AB}|$ なので，$\frac{1}{2}|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{AB}|=\frac{\sqrt{36-p^2}}{2}$ である。

ゆえに，$|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{AB}|=\sqrt{36-p^2}$ である。

答　$|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{AB}|=\sqrt{36-p^2}$